Insinöörimatematiikka C 1 (Vehmanen)

Tentti 10.10.2008

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

– Jokaisen tehtävän vastaus ERI PAPERILLE.

– Jokaiseen paperiin NIMESI ja OPISKELIJANUMEROSI.

1 a) Anna kompleksiluvun $z = 4\sqrt{2}(-1+\mathrm{j})$ polaariesitys.

b) Luettele **a**-kohdan luvun kolmannet juuret (lyhyesti, kaikki kolme).

c) Laske kaikkien kolmen juuren tulo (helpoiten eksponenttimuodossa) ja anna tulon polaariesitys niin, että vaihekulma on välillä $(-\pi, \pi]$.

2. Pisteen $\mathbf{r}_1$ etäisyys tasolta $\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ on vektorin $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ vektorin $\mathbf{n}$ suuntaisen projektiovektorin $\mathbf{p}$ pituus eli pituus vektorille

$$\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\bullet\mathbf{n}}{\mathbf{n}\bullet\mathbf{n}}\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\bullet\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \quad \text{eli luku} \quad e = \frac{|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)\bullet\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

a) Laske pisteen $(2,2,2)$ etäisyys tasolta $x + y - z = 0$.

b) Lähinnä pistettä $\mathbf{r}_1$ oleva tason piste on $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}$. Laske tämä piste **a**-kohdan tapauksessa.

c) Onko edellä laskettu piste $\mathbf{r}_2$ ylipäänsä edes tasolla? Tarkista, että on.

3. Onko tehtävässä 2 järkeilty piste $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}$ tasolla yleisestikin? Kuvasta voitaisiin vakuuttua, että on. Tehdään matemaattinen varmistus: päättele, että tehtävän 2 kaavalla $\mathbb{R}^n$:ssä muodostettu $\mathbf{p}$ toteuttaa

a) $\mathbf{p} \bullet \mathbf{n} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \bullet \mathbf{n}$ **b)** ja edelleen $\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{r}_0) = 0$.

Merkitse näkyviin implikaationuolilla $(\Rightarrow)$ päättelysi eteneminen ja mitä alla olevista säännöistä missäkin kohdassa käytät, jos/kun käytät.

Muistin virkistykseksi:

(i) $\mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$ **(ii)** $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$

(iii) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{z} + \mathbf{y} \bullet \mathbf{z}$ **(iv)** $(c\mathbf{x}) \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x} \bullet (c\mathbf{y}) = c(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})$

Käännä!

4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Laske matriisit AD, DA, $A^T D^T$, mikäli ne on määritelty.

b) Tulo DA on muotoa $DA = [\, D\mathbf{a}_1, D\mathbf{a}_2, D\mathbf{a}_3, D\mathbf{a}_4]$, missä jokainen DA:n pystyrivi $D\mathbf{a}_i$ on puolestaan D:n pystyrivien *lineaarikombinaatio*

$$D\mathbf{a} = x_1\mathbf{d}_1 + x_2\mathbf{d}_2 + x_3\mathbf{d}_3$$

Esitä <u>jokin</u> pystyrivi $D\mathbf{a}_i$ matriisin D pystyrivien $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ ja $\mathbf{d}_3$ lineaarikombinaationa.