

MAT-02500 Todennäköisyyslaskenta

Tentti 14.10.2013 / Kimmo Vattulainen

- Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle konseptille ja 3-4 toiselle konseptille.
 - Funktiolaskin sallittu.
-

1. Tutkija haluaa luoda uuden, nopean pikaviestikielen, jossa on täsmälleen 1000 sanaa. Tavoite on, että sanat ovat lyhyitä ja kielessä on vain vähän kirjaimia. Kielen kaikki sanat ovat siksi 4 merkin pituisia, toisistaan eroavia merkkijonoja ja kielessä on minimimäärä kirjaimia, joilla voidaan esittää kaikki 1000 sanaa.

a) Mikä on kirjaimien minimimäärä? Millä todennäköisyydellä näistä kirjaimista muodostettu mielivaltainen 4 merkin jono on tämän kielen sana?

b) Montako mielivaltaista, toisistaan riippumatonta 4 merkin jonoa tulee muodostaa, että ainakin yksi niistä on tämän kielen sana 99%:n todennäköisyydellä?

2. Laske $P(|X - \mu| \leq \sigma^2)$ kun

a) $X \sim \text{Poi}(2)$

b) X on jatkuva satunnaismuuttuja tiheysfunktioaan

$$f(x) = \frac{x}{18}, \quad 0 \leq x \leq 6$$

3. Satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio on

$$f(x, y) = xy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

a) Laske todennäköisyys $P(X + Y \leq 2)$.

b) Ovatko komponentit X ja Y riippumattomia?

c) Mitä on $\text{Corr}(X, Y)$.

4. a) Arpajaisissa joka viides arpa voittaa 10 e. Arvan hinta on 2.5 e. Henkilö ostaa arpoja 20 eurolla. Millä todennäköisyydellä hänen ostamiensa arpojen voittosumma on vähintään 20 e.

b) Toinen henkilö ostaa arpoja 200 eurolla. Millä todennäköisyydellä hän saa omansa takaisin eli voittaa vähintään 200 e. Käytä laskemisessa normaaliapproksimaatiota.

MAT-02500 Todennäköisyysslaskenta, kaavoja ja taulukoita

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$
4. $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
5. $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$
6. $P(B_k | A) = \frac{P(B_k)P(A | B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}$
7. Riippumattomuus: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
8. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
9. $E(X) = \sum_{x \in \Omega} xf(x) = \mu$, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \mu$
10. $\text{Var}(X) = \sum_{x \in \Omega} (x - \mu)^2 f(x) = \sigma^2$, $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$
11. $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
12. $D(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sigma$
13. $X : f(x)$, $Y = h(X)$, $g(y) = f(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|$

14. $E(h(X)) = \sum_{x \in \Omega} h(x)f(x)$, $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx$
15. $E(aX + b) = aE(X) + b$, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
16. $P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$, $\forall t > 0$
17. $\text{Exp}(\lambda) : f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
18. $\text{Bin}(n, p) : f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$,
 $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$
19. $\text{Poi}(\lambda) : f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $E(X) = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$
20. Riippumattomuus: $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$
21. $\text{Cov}(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(XY) - E(X)E(Y) = \sigma_{XY}$
22. $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \rho_{XY}$
23. $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$
24. $\text{Jos } X \sim N(\mu, \sigma^2)$, niin $z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
25. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
26. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$
27. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
28. $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$
29. $F = \frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(n_X - 1, n_Y - 1)$

