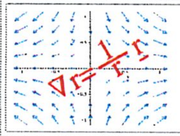

MAT-02401 Vektorianalyysi

Tentti 11.12.2019 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
- Muista aina perustella. Pelkästä arvauksesta ei saa pisteitä.

1. Olkoot $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xy+y, yz-z, 1-zx\big)$ ja $\mathbf{G}(x,y,z) = \big(x,y,z\big)$. Laske $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$ ja $\nabla\times\mathbf{F} + (\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{G}$ sekä niiden arvot pisteessä $(3,-1,2)$.

2. Vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(xz - \sqrt{y}\,,\ \frac{-x}{2\sqrt{y}}\,,\ \frac{x^2}{2}\right).$$

Määritä arvo viivaintegraalille

$$\int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r},$$

(a) kun tie $C : \mathbf{r}(t) = \big(t^2\,,\ 1\,,\ 4t-6\big)$ pisteestä $(1,1,-2)$ pisteeseen $(4,1,2)$,

(b) kun tie C on jana pisteestä $(4,1,2)$ pisteeseen $(1,1,-2)$.

3. Laske pinnan S pinta-ala, kun

$$S = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = y^2+z^2, 0\le x\le 2\big\}.$$

4. Vektorikenttä

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}^0}{r^2},$$

missä $\mathbf{r}^0$ on vektorin $\mathbf{r} = (x,y,z)$ suuntainen yksikkövektori ja $r = ||\mathbf{r}||$. Symbolit q ja ε_0 ovat vakioita. Määritä vektorikentän vuo suljetun pinnan S läpi poispäin pinnasta, kun pinta on sileä ja origo on sen rajaaman kappaleen sisällä. Muuta pinnasta ei tiedetä.

Kaavakokoelma

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f\big(\mathbf{r}(t)\big)||\mathbf{r}'(t)||\,dt$$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_\Omega \nabla\cdot\mathbf{F}\,dA$$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_\Omega f\big(\mathbf{r}(u,v)\big)||\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v||\,du\,dv$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_\Omega \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(u,v)\big)\cdot\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,du\,dv$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV$$