MAT-01430 2018-01 Insinöörimatematiikka C 4 / Orelma,
Tentti 08.05.2019

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin (à 1p):

   (a) Laske funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ gradientti ∇f.

   (b) Mitä tarkoittaa että käyrä $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ on sileä?

   (c) Olkoot $f = f(x,y,z)$ ja $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ jatkuvasti differentioituvia funktiota. Johda ketjusäännön avulla lauseke derivaatoille $\frac{\partial f}{\partial u}$ ja $\frac{\partial f}{\partial v}$.

   (d) Tarkastellaan kappaletta, jonka rajaa pallo $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ja ehdot $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \leq 0$. Esitä kappale pallokoordinaateissa.

   (e) Mikä on Laplacen operaattori?

   (f) Määritä funktion $F(x,y,z) = (yz, xz)$ Jacobin matriisi.

2. Eräässä avaruuden $\mathbb{R}^3$ alueessa sähkökentän potentiaalifunktio on kaavan

$$V(x,y,z) = x^2 + yz + xyz$$

   mukainen. Tarkastellaan pistettä $P = (1,1,-1)$.

   (a) Kun pisteestä P ollaan lähtemässä kohti pistettä $Q = (4,5,4)$, mikä on suuntavektori ja mikä on funktion hetkellinen muutosnopeus (suunnattu derivaatta) ko. suuntaan?

   (b) Mihin suuntaan pisteestä P lähdettäessä funktion muutosnopeus on suurin ja kuinka suuri se silloin on?

   (c) Anna jokin suunta, johon pisteestä P lähdettäessä funktio ei muutu.

3. Määritä Lagrangen menetelmällä funktion $f(x,y) = x - y$ ääriarvot alueessa D, joka sijaitsee kiekon $x^2 + y^2 \leq 1$ ja positiivisen kvadrantin[1] leikkauksessa.

4. Tarkastellaan kappaletta, jonka rajoittavat tasot $z = 0$ ja $z = 1$ sekä sylinteri $x^2 + y^2 = 4$. Hahmottel~~u~~e kuva kappaleesta. Laske tilavuusintegroimalla kappaleen tilavuus.

[1]Eli se xy-tason osa, missä $x \geq 0$ ja $y \geq 0$

Insinöörimatematiikka C 4, kaavakokoelma

1. $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

2. $(F \circ G)'(\mathbf{x}) = F'(G(\mathbf{x}))\, G'(\mathbf{x})$

3. $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

4. $\iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$

5. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad dxdydz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$

6. $m = \iiint_T \delta\, dV, \quad \overline{x} = \iiint_T x\delta\, dV, \quad I_z = \iiint_T \left(x^2 + y^2\right) \delta\, dV$

7. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \qquad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$

8. $\int_a^b f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \Big/_a^b f(g(x))$

   $\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big/_a^b f(x)\, g(x) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$

   $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \Big/_a^b \ln|f(x)|$