MAT-01360 Matematiikka 3, kevät 2014,
2. välikoe & tentti, ma 3.3.2014 (vko 10)

Tentaattori: Simo Ali-Löytty

```
Ohjeet: Ei laskimia, eikä muistiinpanoja.
        Kaavakokoelma on paperin kääntöpuolella.
        Jokainen tehtävä tehdään omalle sivulle / omille sivuille.
        Kirjoita vastauksien perustelut ja välivaiheet näkyviin!
        Mikäli osallistut 2. välikokeeseen vastaa tehtäviin 1-2.
        Mikäli osallistut tenttiin vastaa tehtäviin 1-4.
```

2. Välikoe ja tentin kaksi ensimmäistä tehtävää

1. (a) Selvitä potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k}$ suppenemisväli.

   (b) Tiedetään, että $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-1)^k}{k}$. Laske $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ yhden desimaalin tarkkuudella.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $y''(x) - y'(x) = 2\sin(x)$, $y(0) = 1$ ja $y'(0) = 0$.

Tentin kaksi viimeistä tehtävää

3. Laske funktioiden $f(x) = 2x\cos(x)$ ja $g(x) = \cos(x)$ ja suorien $x = 0$ ja $x = 1$ rajaaman äärellisen alueen pinta-ala. Toisin sanoen laske integraali

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$$

4. Olkoon $a < b$. Laske alla olevan määritelmän avulla integraali $\int_a^b x \, dx$. Oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen. Mikäli ei käytä mielivaltaista jakoa vaan esimerkiksi vain tasavälistä jakoa voi saada maksimissaan 3 pistettä tehtävästä.

Taustaa: (Riemann-)integraali määritellään seuraavasti. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Jos raja-arvo $I = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$ on olemassa, niin silloin f on integroituva välillä $[a, b]$ ja luku I on funktion f määrätty integraali yli välin $[a, b]$. Tällöin merkitään $I = \int_a^b f(x) \, dx$. Yllä olevassa $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ on välin $[a, b]$ mielivaltainen jako, missä $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, jaon normi $|P| = \max\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ ja x_i^* on välin $[x_{i-1}, x_i]$ mielivaltainen piste.

AM

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

MAT-01360 Matematiikka 3, kaavakokoelma 2013-2014

1. Integrointikaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar\,cosh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C$

2. $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$

3. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$

4. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}, \ \sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \qquad (x \in \mathbb{C})$$

6. $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 = 0$: $\quad a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

- yksinkertainen reaalijuuri λ: ratkaisu $e^{\lambda x}$
- yksinkertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
  $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ ja $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
- k-kertainen reaalijuuri λ: ratkaisut
  $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
- k-kertainen imaginaarijuuripari $\lambda = \alpha \pm \beta i$: ratkaisut
  $e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
  $e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$