Tampereen yliopisto
Tampere University

MAT-01230 Insinöörimatematiikka C2 / Kaarakka

Kokonaispisteiden korottaminen tentillä (max 600 pistettä), 11.12. 2019

Tentissä ei saa olla laskinta. Muista perustella ratkaisusi huolellisesti! **Tehtäviä on paperin molemmilla puolilla!**

Tehtävät

1. Suora l_1 kulkee pisteiden $(1,2,-1)$ ja $(2,-1,1)$ kautta.
   Suora l_2 kulkee pisteiden $(2,1,-5)$ ja $(3,-1,-6)$ kautta.
   Suora l_3 on parametrimuodossa esitettynä $(1,0,1)+t(-1,2,-3)$, $t \in \mathbb{R}$
   a) Määritä suorien l_1 ja l_2 leikkauspiste.
   b) Suorat l_1 ja l_2 ovat samalla tasolla. Määritä tason yhtälö muodossa $ax+by+cz+d=0$.
   c) Suorat l_1 ja l_2 ovat samalla tasolla. Määritä tason yhtälö parametrimuodossa.
   d) Määritä b- tai c-kohdassa määritellyn tason ja suoran l_3 leikkauspiste.

2. Millä vakioiden a, $b \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä
   a) on yksikäsitteinen ratkaisu? Esitä ratkaisu.
   b) on äärettömän monta ratkaisua? Esitä ratkaisu.
   c) ei ole lainkaan ratkaisua?

$$\begin{cases} 2x+y+3z = 5 \\ -x-2y = 2 \\ x+y+az = b \end{cases}$$

3. Laske seuraavat matriisit. Vihje: Sievennä ensin.
   a) $A^{-1}(\mathbf{b}^T\mathbf{b})^{-1}A^T$
   b) $\mathbf{b}^T A^2 \mathbf{b}$
   c) $(A^{-1})^T + (I - A - A^{-1})(A^T + I)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Etsi yksi sellainen $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta, jossa yksi vektoreista on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen. Esitä vektori $\mathbf{x}$ näiden vektorien lineaarikombinaationa.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. (a) Matriisia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kutsutaan **idempotentiksi**, jos $A^2 = A$. Osoita, että idempotentin matriisin determinantti on joko 0 tai 1.

   (b) Todista: Jos $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on ortogonaalinen matriisi niin $\det(Q) = \pm 1$.

6. Mitkä ovat symmetrisen matriisin A ominaisarvot ja ominaisavaruudet. Näytä, että matriisi on diagonalisoituva? Esitä matriisi A muodossa $A = VDV^{-1}$. Totea lopuksi, että V:n sarakkeet ovat ortogonaalisia.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$