

**MAT-01230 Insinöörimatematiikka C 2 (Kangas)**
Tentti 9.12.2013

Tentissä ei saa käyttää laskinta, taulukkokirjoja tai muuta erillistä materiaalia.

1. Ratkaise vektoreista

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

muodostettu yhtälöryhmä

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Vastaa myös (perusteluiden kera) kysymykseen: Ovatko vektorit \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 ja \mathbf{v}_3 lineaarisesti riippumattomia?

2. a) Esitä pisteiden $P = (1, 1, 1)$, $Q = (4, 0, 2)$ ja $R = (0, 1, -1)$ kautta kulkevan tason yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$
b) Määritä pisteen $S = (2, 2, -1)$ etäisyys a -kohdan tasosta.

3. Matriisi A on muutettu redusoituun riviporrasmuotoon $rref(A)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Etsi matriisin A sarakeavaruuden $R(A)$ ja nolla-avaruuden $N(A)$ kannat.

4. a) Muodosta matriisi A , jonka ominaisarvot ja eräät niitä vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ja } \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- b) Laske A^n , kun n on PARILLINEN kokonaisluku.
c) Laske A^n , kun n on PARITON kokonaisluku.

Insinöörimatematiikka C2

Kaavakokoelma

1.

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

2.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

3.

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}.$$

4. Tasot:

(a)

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{p}$$

(b)

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

5.

$$(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

6.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

7. Ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \det(A - \lambda I) = 0.$$

8. Diagonalisointi

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

9. Pienimmän neliösumman menetelmä

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$