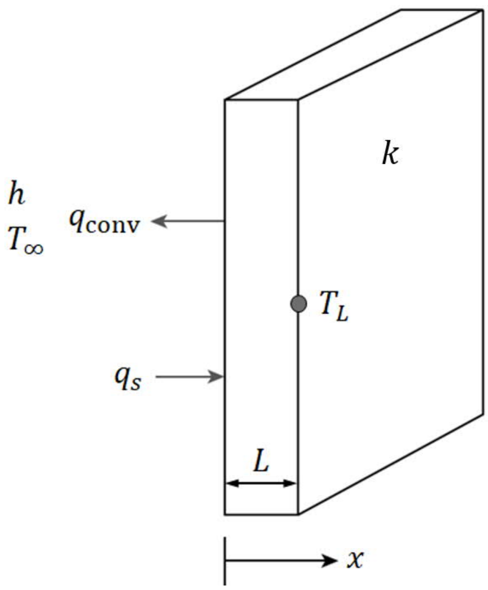
Tampereen yliopisto
KEB-40200 LÄMMÖNSIIRTO
Välikoe 1: 2.3.2021 / ratkaisut

1. Kuvan mukaisessa tilanteessa levyn (paksuus L) vasempaan reunaan kohdistuu ulkopuolisesta säteilylähteestä lämpövirran tiheys q_s [W/m^2]. Lisäksi vasemmanpuoleisesta pinnasta poistuu lämpöä ympäristöön konvektiolla; lämmönsiirtokerroin on h ja ympäristön lämpötila T_∞. Levyn oikeanpuoleisen pinnan lämpötila on T_L. Levymateriaalin lämmönjohtavuus on k.



   (a) Kirjoita kuvan koordinaatistossa differentiaaliyhtälö sekä reunaehdot, joista voidaan ratkaista lämpötilajakauma, $T(x)$, levyssä. Johtuminen levyssä on 1-ulotteista eli lämpötila muuttuu vain levyn paksuussuunnassa (x-suunta) ja tilanne on stationääri (älä sijoita lukuarvoja tässä vaiheessa).

   (b) Määritä lämpötilajakauma levyssä seuraavilla lukuarvoilla: L = 10 cm, k = 2 W/(m °C), q_s = 1500 W/m^2, T_L = 50 °C, h = 5 W/(m^2 °C) ja T_∞ = 25 °C.

(a)

Diff. yhtälö: $\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$

RE1: $-k\dfrac{dT(0)}{dx} = q_s - q_{conv} = q_s - h[T(0) - T_\infty]$

RE2: $T(L) = T_L$

(b)

Ratkaisu lämpötilajakaumalle: $T(x) = C_1x + C_2$

$$-k\frac{dT(0)}{dx} = q_s - h[T(0) - T_\infty] \;\rightarrow\; -kC_1 = q_s - h(C_2 - T_\infty)$$

$$T(L) = T_L \;\rightarrow\; C_1L + C_2 = T_L$$

Sijoitetaan lukuarvot ja järjestellään termejä:

$-2C_1 + 5C_2 = 1625$

$0.1C_1 + C_2 = 50$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä C_1 (= $2.5C_2 - 812.5$) ja sijoitetaan toiseen yhtälöön:

$0.1(2.5C_2 - 812.5) + C_2 = 50 \rightarrow (0.25 + 1)C_2 = 50 + 81.25 \rightarrow C_2 = 105$

$\rightarrow C_1 = 2.5C_2 - 812.5 = 2.5 \cdot 105 - 812.5 = -550$

$\rightarrow T(x) = -550x + 105$

(b)-kohdan voi ratkaista myös toisella tavalla soveltamalla kaavakokoelmassa annettua yhtälöä lämpötilajakaumalle:

$$T(x) = T_1 - \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right)x$$

Tästä yhtälöstä T_2 tunnetaan (annettu lähtötietona; $T_2 = T(L) = T_L = 50$ °C). Määritetään T_1 eli $T(0)$:

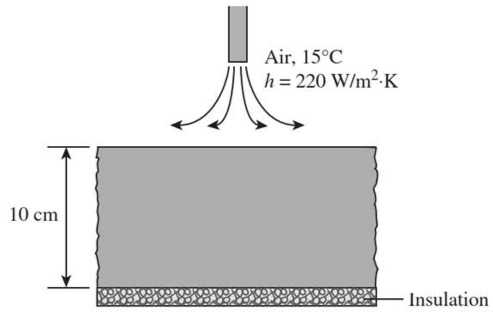
$$q_s - h[T(0) - T_\infty] = k\left[\frac{T(0) - T_L}{L}\right]$$

Sijoitetaan lukuarvot:

$$1500 - 5 \cdot [T(0) - 25] = \frac{2 \cdot [T(0) - 50]}{0.1} \rightarrow T(0) = 105\text{ °C } (= T_1)$$

$$\rightarrow T(x) = T_1 - \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right)x = 105 - \left(\frac{105 - 50}{0.1}\right)x = 105 - 550x$$

2. Teräslevyä, jonka paksuus on 10 cm ja alkulämpötila 600 ℃, jäähdytetään kuvan mukaisesti yläpinnalta ilmasuihkulla; ilman lämpötila on 15 ℃ ja lämmönsiirtokerroin 220 W/(m^{2}K). Alapuolelta levy on eristetty. Teräkselle k = 55 W/(m K), ρ = 7800 kg/m^3 ja c = 450 J/(kg K). Määritä, missä ajassa levyn yläpinnan lämpötila saavuttaa arvon 200 ℃. Määritä myös, paljonko levystä on poistunut lämpöä tässä ajassa (neliömetriä kohden). Jos et saanut edellä määritettyä aikaa, laske paljonko levystä poistuu lämpöä 10 minuutissa. Johtuminen on yulotteista.



Eristetty reuna vastaa symmetriatasoa. Tämän tehtävän ratkaisu menee siis samalla tavalla kuin sellaisen tehtävän, jossa levyn paksuus on 20 mm ja jäähdytys tapahtuu levyn molemmilta puolilta samalla tavalla (sama h ja T_∞).

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{55}{7800 \cdot 450} = 1.567 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$$

Koska aikaa t ei tunneta, Fourier'n lukua Fo ei voida määrittää. Oletetaan, että Fo $>$ 0.2 ja käytetään yhden termin ratkaisua (tarkistetaan asia lopuksi).

$$\text{Bi} = \frac{hL}{k} = \frac{220 \cdot 0.1}{55} = 0.4 \ \rightarrow\ \lambda_1 = 0.5932; A_1 = 1.0580; B_1 = 0.9426$$

Lopputilanteen dimensioton lämpötila levyn pinnalla, kun T = 200 ℃:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{200 - 15}{600 - 15} = 0.3162$$

$$\text{Toisaalta: } \theta = A_1\, e^{-\lambda_1^2 \text{Fo}} \cos(\lambda_1 \eta) \ \rightarrow\ \text{Fo} = -\frac{1}{\lambda_1^2} \ln\left[\frac{\theta}{A_1 \cos(\lambda_1 \eta)}\right]$$

$$\text{Levyn pinnalla } \eta = 1 \ \rightarrow\ \text{Fo} = -\frac{1}{(0.5932)^2} \ln\left[\frac{0.3162}{1.058 \cdot \cos(0.5932 \cdot 1)}\right] = 2.90 \quad (>0.2 \text{ ok!})$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} \ \rightarrow\ t = \frac{\text{Fo}\, L^2}{\alpha} = \frac{2.90 \cdot (0.1)^2}{1.567 \cdot 10^{-5}} = 1851\ \text{s} \approx 31\ \text{min}$$

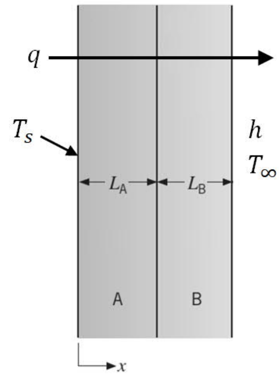
Dimensioton keskilämpötila lopputilanteessa:

$$\bar{\theta} = A_1\, e^{-\lambda_1^2 \text{Fo}} B_1 = 1.058 \cdot e^{-(0.5932)^2 \cdot 2.90} \cdot 0.9426 = 0.3594$$

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_i - T_\infty} \ \rightarrow\ \bar{T} = \bar{\theta}(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.3594 \cdot (600 - 15) + 15 = 225.2\ ℃$$

$$\rightarrow \frac{\dot{Q}}{A} = \rho L c (T_i - \bar{T}) = 7800 \cdot 0.1 \cdot 450 \cdot (600 - 225.2) = 1.316 \cdot 10^8\ \text{J} \approx 132\ \text{MJ}$$

3. Tarkastellaan kuvan mukaista seinämää, joka muodostuu kahdesta kerroksesta. Alkutilanteessa seinämä on kauttaaltaan lämpötilassa 20 °C. Tietyllä hetkellä ($t = 0$) seinämän vasemman reunan, $x = 0$, lämpötila muuttuu arvoon $T_s = 500$ °C. Oikealta reunalta lämpö siirtyy ympäristöön konvektiolla: ympäröivän ilman lämpötila $T_\infty = 20$ °C ja lämmönsiirtokerroin $h = 10$ W/(m K). Johtuminen seinämässä voidaan olettaa yksiulotteiseksi (x-suunta). Lämmönjohtavuudet ja termiset diffusiviteetit ovat: $k_A = 2$ W/(m K), $k_B = 0.25$ W/(m K), $\alpha_A = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s ja $\alpha_B = 2 \cdot 10^{-7}$ m²/s. Kerrosten paksuudet ovat: $L_A = L_B = 15$ cm.



   (a) Määritä lämpötila kerroksessa A kohdassa $x = 5$ cm ajan hetkellä $t = 10$ min. Perustele myös, miksi käyttämääsi menetelmää voidaan soveltaa tässä tapauksessa.

   (b) Kun $t \to \infty$, tilanne tulee ajasta riippumattomaksi eli stationääriksi. Mikä on tällöin lämpövirran tiheys, q, seinämän yli.

   (c) Oikean reunan lämpötilaa halutaan laskea käyttämällä kerroksessa (B) materiaalia, jolla on alempi lämmönjohtavuus. Mikä pitäisi olla k_B, jotta oikean reunan lämpötila olisi (stationäärissä tilanteessa) korkeintaan 60 °C. Muut lähtöarvot pysyvät muuttumattomina.

(a)

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L_A^2} = \frac{1.0 \cdot 10^{-6} \cdot 600}{(0.15)^2} = 0.0267 < 0.05$$

→ ajan hetkellä $t = 10$ min (= 600 s) johtuminen kerroksessa A voidaan käsitellä soveltamalla puoliäärettömän kappaleen teoriaa

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} = \frac{0.05}{\sqrt{4 \cdot 1.0 \cdot 10^{-6} \cdot 600}} \approx 1.02 \xrightarrow{\text{taulukosta}} \theta = \mathrm{erfc}(1.02) = 0.1492$$

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_s - T_i} \;\rightarrow\; T = \theta(T_s - T_i) + T_i = 0.1492 \cdot (500 - 20) + 20 = 91.6\ ^\circ\mathrm{C}$$

(b)

$$\dot{Q} = \frac{T_s - T_\infty}{R_{tot}} = \frac{T_s - T_\infty}{\frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{1}{hA}}$$

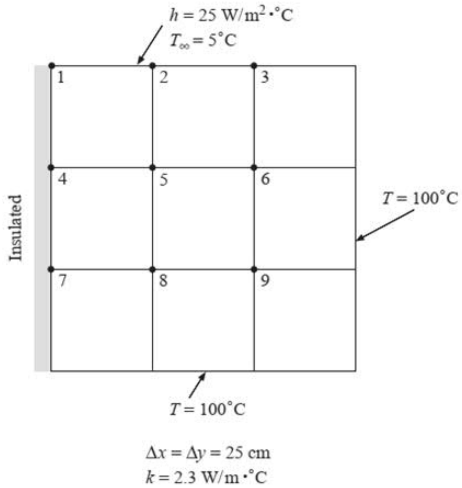
$$\rightarrow\; q = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{T_s - T_\infty}{\frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{1}{h}} = \frac{500 - 20}{\frac{0.15}{2} + \frac{0.15}{0.25} + \frac{1}{10}} = \frac{480}{0.775} = 619.4\ \mathrm{W/m^2}$$

(c)

$q = h\left(T_{s,out} - T_\infty\right) = 10 \cdot (60 - 20) = 400$ W/m² (lämpövirran tiheys muuttuu!)

$$q = \frac{T_s - T_{s,out}}{\frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B}} = \frac{500 - 60}{\frac{0.15}{2} + \frac{0.15}{k_B}} = 400\ \mathrm{W/m^2} \;\rightarrow\; k_B = 0.146\ \mathrm{W/(m\,K)}$$

4. Differenssimenetelmää käyttäen ratkaistaan stationääri lämpötilajakauma kuvan mukaisessa 2-ulotteisessa geometriassa (75 cm × 75 cm). Reunaehtoina on annettu lämpötila alapinnalla ja oikealla reunalla sekä konvektiivinen lämmönsiirtokerroin ja ympäristön lämpötila yläpinnalla; vasen reuna on lämpöeristetty. Materiaalille k = 2.3 W/(m ℃) ja $\Delta x = \Delta y = 25$ cm.



   (a) Yleisessä tapauksessa stationäärin lämmönjohtumistehtävän ratkaisu differenssimenetelmällä johtaa aina lopuksi lineaarisen yhtälöryhmän numeeriseen ratkaisemiseen (tässä tapauksessa yhdeksän yhtälöä). Millaisia menetelmiä on olemassa tähän tarkoitukseen?

   (b) Määritä lämpötilat solmupisteissä 2, 4, 6 ja 9, kun muiden solmupisteiden lämpötilat on annettu oheisessa taulukossa.

T1=	17.86
T2=	
T3=	29.93
T4=	
T5=	54.59
T6=	
T7=	77.69
T8=	79.80
T9=	

Lineaarisen yhtälöryhmän numeeriset ratkaisumenetelmät:

Suorat menetelmät

- esim. Gaussin eliminointi ja Gauss-Jordan -eliminointi

Iteratiiviset menetelmät

- esim. Jacobi ja Gauss-Seidel

Alla tekstiä kirjasta: J. Haataja, Numeeriset menetelmät käytännössä, CSC-Tieteellinen laskenta, Espoo, 2002:

Jacobin menetelmä on yksinkertaisin ajateltavissa oleva iteraatiokaava, jossa ratkaistaan vuorollaan kukin muuttuja kaikkien muiden muuttujien suhteen. Komponenttimuodossa Jacobin menetelmän iteraatiokaava on

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^k\right), \quad i = 1,\dots,N, a_{ii} \neq 0. \qquad (3.15)$$

Tässä kaavassa x_j^k tarkoittaa vektorin komponenttia j iteraatiokierroksella k.

Gaussin ja Seidelin menetelmä on Jacobin menetelmän yleistys, jossa käytetään aina uusinta mahdollista informaatiota. Eli jos joitakin vektorin komponentteja on jo päivitetty, käytetään tätä informaatiota päivitettäessä muitakin komponentteja.

Piste 6 ja 9 (sisäpisteet):

$T_5 + T_3 + 100 + T_9 - 4T_6 = 0$

$T_8 + T_6 + 100 + 100 - 4T_9 = 0$

Saadaan yhtälöryhmä, jossa on kaksi yhtälöä ja kaksi tuntematonta (T_6 ja T_9)

Sijoitetaan tunnetut lämpötilat:

$4T_6 - T_9 = 184.52$

$-T_6 + 4T_9 = 279.80$

Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö luvulla 4 ja lasketaan yhtälöt yhteen:

$15T_9 = 1303.72 \;\; \rightarrow \;\; T_9 = 86.91\ ℃$

$\rightarrow \; T_6 = 4T_9 - 279.8 = 4 \cdot 86.91 - 279.80 = 67.84$

Piste 2 (reunapiste, konvektio reunalla):

$$2T_5 + T_1 + T_3 + \frac{2h\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_2 = 0$$

$$\rightarrow \; 2T_5 + T_1 + T_3 + 5.4348T_\infty - 9.4348T_2 = 0 \qquad \left(\frac{h\Delta x}{k} = \frac{25 \cdot 0.25}{2.3} = 2.7174\right)$$

$$\rightarrow \; T_2 = \frac{2T_5 + T_1 + T_3 + 6.25T_\infty}{16.5} = \frac{2 \cdot 54.59 + 17.86 + 29.93 + 5.4348 \cdot 5}{9.4348} = 19.52\ ℃$$

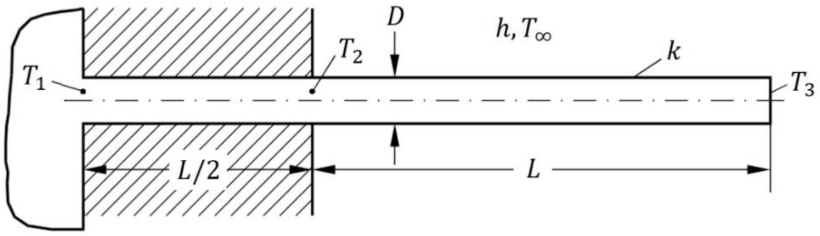
Piste 4 (reunapiste, eristetty reuna):

Voidaan käyttää samaa tulosta kuin edellä, kun merkitään, että $h = 0$:

$2T_5 + T_1 + T_7 - 4T_4 = 0$

$$\rightarrow \; T_4 = \frac{2T_5 + T_1 + T_7}{4} = \frac{2 \cdot 54.59 + 17.86 + 77.69}{4} = 51.18\ ℃$$

5. Kuumaan seinään on kiinnitetty pyöreä terästanko, jonka halkaisija $D = 5$ mm ja lämmönjoh-tavuus $k = 60$ W/(m °C). Alkuosasta tanko on kuvan mukaisesti eristetty matkalta 25 mm ($= L/2$). Eristeen jälkeisestä osasta tankoa, pituus $L = 50$ mm, lämpö siirtyy konvektiolla ympäröivään ilmaan, jonka lämpötila $T_\infty = 20$ °C; lämmönsiirtokerroin tangosta ilmaan $h = 15$ W/(m^2 °C). Määritä lämpötilat T_1 ja T_3 sekä lämpövirta tangon kautta, kun tiedetään, että lämpötila $T_2 = 70$ °C (voidaan käyttää ripateoriaa ja olettaa tangon kärki eristetyksi). Arvioi myös paljonko lämpövirta muuttuu, jos konvektio tangon kärjestä otetaankin huomioon.



$P = \pi D = \pi \cdot 0.005 = 0.0157$ m

$A_c = \pi D^2/4 = \pi \cdot (0.005)^2/4 = 0.00001963$ m^2

$$\rightarrow\ m = \left(\frac{hP}{kA_c}\right)^{1/2} = \left(\frac{15 \cdot 0.0157}{60 \cdot 0.00001963}\right)^{1/2} = 14.14\ 1/\text{m}$$

Lämpövirta ($T_b = T_2$):

$$\dot{Q} = \frac{hP}{m}(T_2 - T_\infty)\tanh(mL) = \frac{15 \cdot 0.0157}{14.14} \cdot (70 - 20) \cdot \tanh(14.14 \cdot 0.05) = 0.507\ \text{W}$$

Lämpötila tangon kärjessä, T_3 ($= T(L)$):

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

$$\longrightarrow\ T_3 = T(L) = \frac{1}{\cosh(mL)}(T_2 - T_\infty) + T_\infty = \frac{1}{\cosh(14.14 \cdot 0.05)} \cdot (70 - 20) + 20 = 59.67\ ^\circ\text{C}$$

$$\dot{Q} = kA_c\frac{T_1 - T_2}{L/2}\ \rightarrow\ T_1 = T_2 + \frac{\dot{Q}}{kA_c}\frac{L}{2} = 70 + \frac{0.507}{60 \cdot 0.00001963} \cdot 0.025 = 80.76\ ^\circ\text{C}$$

Konvektio rivan kärjestä voidaan ottaa huomioon käyttämällä korjattua rivan pituutta seuraavasti:

$$L_c = L + \frac{A_c}{P} = 0.05 + \frac{0.00001963}{0.0157} = 0.05125\ \text{m}$$

$$\rightarrow\ \dot{Q} = \frac{hP}{m}(T_2 - T_\infty)\tanh(mL) = \frac{15 \cdot 0.0157}{14.14} \cdot (70 - 20) \cdot \tanh(14.14 \cdot 0.05125) = 0.516\ \text{W} \quad (\text{ero} < 2\ \%)$$