KEB-40200 LÄMMÖNSIIRTO

Välikoe 1: 27.2.2018, ratkaisut

1. Hallitseva yhtälö:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Reunaehdot:

Alapinta, $x = 0$: $-k\frac{dT(0)}{dx} = q_s$ Yläpinta, $x = L$: $-k\frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu (integrointi kahteen kertaan): $T(x) = C_1 x + C_2$

Vakiot C_1 ja C_2 saadaan määritettyä reunaehtojen avulla:

Alapinta: $-k\frac{dT(0)}{dx} = q_s \longrightarrow -kC_1 = q_s \longrightarrow C_1 = -\frac{q_s}{k} = -\frac{5000}{5} = -1000\ °\text{C/m}$

Yläpinta: $-k\frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty] \longrightarrow -kC_1 = h(C_1 L + C_2 - T_\infty)$

$$\longrightarrow C_2 = -\frac{k}{h}C_1 - C_1 L + T_\infty = \frac{k}{h}\frac{q_s}{k} + \frac{q_s}{k}L + T_\infty = \frac{q_s}{h} + \frac{q_s}{k}L + T_\infty = \frac{5000}{25} + \frac{5000}{5}\cdot 0.05 + 20 = 270\ °\text{C}$$

$$\longrightarrow T(x) = C_1 x + C_2 = -1000x + 270$$

Ala- ja yläpinnan lämpötilat:

Alapinta: $T_1 = T(0) = -1000 \cdot 0 + 270 = 270\ °\text{C}$

Yläpinta: $T_2 = T(L) = -1000L + 270 = -1000 \cdot 0.05 + 270 = 220\ °\text{C}$

Levyn pintalämpötilat sekä lämpötilajakauman saa määritettyä myös toisella tavalla:

$$q_s = h(T_2 - T_\infty) \longrightarrow T_2 = \frac{q_s}{h} + T_\infty = \frac{5000}{25} + 20 = 220\ °\text{C}$$

$$q_s = \frac{k(T_1 - T_2)}{L} \longrightarrow T_1 = \frac{q_s L}{k} + T_2 = \frac{5000 \cdot 0.05}{5} + 220 = 270\ °\text{C}$$

Tämän jälkeen saadaan lämpötilajakauma, käyttämällä kaavakokoelmassa annettua yhtälöä:

$$T(x) = T_1 - \left(\frac{T_1 - T_2}{L}\right)x = 270 - \left(\frac{270 - 220}{0.05}\right)x = 270 - 1000x$$

2. Pisteet 3, 7 ja 11:

$$T_3 = \frac{T_2 + T_7 + T_4 + 100}{4}$$

$$T_7 = \frac{T_3 + T_6 + T_{11} + T_8}{4}$$

$$T_{11} = \frac{T_{12} + T_7 + T_{10} + 300}{4}$$

Piste 8:

$$2T_7 + T_4 + T_{12} + \frac{2h\Delta x}{k} T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) T_8 = 0$$

$$\longrightarrow \; 2T_7 + T_4 + T_{12} + 36 - 5.8\, T_8 = 0$$

$$\longrightarrow \; T_8 = \frac{2T_7 + T_4 + T_{12} + 36}{5.8}$$

Piste 5:

Eristetylle reunalle reunaehto saadaan erikoistapauksena seuraavista: (i) konvektio reunalla (tällöin merkitään $h = 0$), (ii) lämpövirran tiheys reunalla (tällöin merkitään $q_s = 0$). Molemmat johtavat samaan yhtälöön:

$$T_5 = \frac{T_1 + T_9 + 2T_6}{4}$$

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmät:

Suorat menetelmät

- esim. Gaussin eliminointi ja Gauss-Jordan eliminointi

Iteratiiviset menetelmät

- esim. Jacobi ja Gauss-Seidel

Edellä saadut yhtälöt soveltuvat suoraan iteratiivisille menetelmille (kts. alla); suorissa menetelmissä täytyy yhtälöt kirjoittaa matriisimuotoon.

Gauss-Seidel Iteration

When the number of equations is very large, the matrix is not sparse, and the computer storage is critical, an iterative technique frequently is preferred for the solution of such a system. The Gauss-Seidel iteration (often called the Liebmann iteration) is one of the most efficient procedures for solving large systems of equations. The procedure involves the following steps: (1) Solve each equation for one of the unknowns. (2) Make initial guesses for all unknowns, and compute the unknowns from the equations developed in step 1 (use the most recently computed values for the unknowns in each equation). (3) Repeat the procedure until a specified convergence criterion is satisfied.

To illustrate the application of the Gauss-Seidel iteration process, we consider the following three simultaneous algebraic equations for the three unknowns T_1, T_2, and T_3:

$$a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 = f_1 \tag{5-32a}$$

$$a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 = f_2 \tag{5-32b}$$

$$a_{31}T_1 + a_{32}T_2 + a_{33}T_3 = f_3 \tag{5-32c}$$

The first equation is solved for T_1, the second for T_2 and the third for T_3:

$$T_1 = \frac{f_1 - a_{12}T_2 - a_{13}T_3}{a_{11}} \tag{5-33a}$$

$$T_2 = \frac{f_2 - a_{21}T_1 - a_{23}T_3}{a_{22}} \tag{5-33b}$$

$$T_3 = \frac{f_3 - a_{31}T_1 - a_{32}T_2}{a_{33}} \tag{5-33c}$$

3. Yksinkertaistukset ripateoriassa:

   - Lämpötila rivan poikkileikkauksessa on vakio eli lämpötila muuttuu vain rivan pituussuunnassa; $T = T(x)$
   - Lämmönsiirtokerroin h rivan pinnalla on vakio
   - Lämpötila pohjalevyssä (johon rivat on kiinnitetty) on vakio
   - Rivan kärki on eristetty

Tehtävän tapauksessa tangon keskipiste on symmetriapiste, joka matemaattisessa mielessä vastaa eristettyä reunaa, joka puolestaan on reunaehto, jota normaalisti käytetään rivan kärjelle. Tanko voidaan siis käsitellä kahtena ripana, joiden kummankin pituus on 0.3/2 = 0.15 m ja halkaisija 3 cm.

$$P = \pi D = \pi \cdot 0.03 = 0.09425 \text{ m}$$

$$A_c = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.03)^2}{4} = 0.0007069 \text{ m}^2$$

$$m = \left(\frac{hP}{kA_c}\right)^{1/2} = \left[\frac{20 \cdot 0.09425}{45 \cdot 0.0007069}\right]^{1/2} = 7.698 \text{ 1/m}$$

Lämpövirta rivan kautta (eli tangon puolikkaan kautta):

$$\dot{Q} = kA_c m(T_b - T_\infty)\tanh(mL)$$

$$= 45 \cdot 0.0007069 \cdot 7.698 \cdot (200 - 38) \cdot \tanh(7.698 \cdot 0.15) = 32.5 \text{ W}$$

Kokonaislämpövirta tangon kautta on siis 2 × edellä saatu arvo eli 65 W.

Lämpötila rivan kärjessä (eli tangon keskipisteessä):

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L - x)]}{\cosh(mL)}$$

$$\longrightarrow T(L) = T_\infty + (T_b - T_\infty)\frac{\cosh(0)}{\cosh(mL)}$$

$$= 38 + (200 - 38)\frac{1}{\cosh(7.698 \cdot 0.15)} = 130.9 \text{ °C}$$

4.

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{tot}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A} + \frac{1}{h_2 A}}$$

$$\longrightarrow\ q = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_2}} \qquad q = \frac{10000}{8} = 1250\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\longrightarrow\ \frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_B}{k_B} + \frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_2} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{q}$$

$$\longrightarrow\ k_B = \frac{L_B}{\frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{q} - \frac{1}{h_1} - \frac{L_A}{k_A} - \frac{L_C}{k_C} - \frac{1}{h_2}}$$

$$= \frac{0.03}{\frac{200 - 20}{1250} - \frac{1}{80} - \frac{0.03}{25} - \frac{0.02}{50} - \frac{1}{10}} = 1.0033\ \mathrm{W/(m\ ^\circ C)}\ \approx 1\ \mathrm{W/(m\ ^\circ C)}$$

$$q = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A}} \ \longrightarrow\ T_1 = T_{\infty 1} - q\left(\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{k_A}\right) = 200 - 1250 \cdot \left(\frac{1}{80} + \frac{0.03}{25}\right) = 182.9\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$q = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_2}} \ \longrightarrow\ T_2 = T_{\infty 2} + q\left(\frac{L_C}{k_C} + \frac{1}{h_2}\right) = 20 + 1250 \cdot \left(\frac{0.02}{50} + \frac{1}{10}\right) = 145.5\ ^\circ\mathrm{C}$$

Edellä on jo määritetty kerroksen B lämmönjohtavuus k_B. Vaihtoehtoisesti sen määrittämisen olisi voinut tehdä vasta sitten, kun lämpötilat T_1 ja T_2 on ensiksi määritetty. Nyt k_B saadaan paljon helpommin kuin edellä:

$$q = \frac{k_B(T_1 - T_2)}{L_B} \ \longrightarrow\ k_B = \frac{qL_B}{T_1 - T_2} = \frac{1250 \cdot 0.03}{182.9 - 145.5} \approx 1\ \mathrm{W/(m\ ^\circ C)}$$

5. Kyseessä on ajasta riippuva lämmönjohtumistehtävä, jolle yleinen ratkaisu on sarjamuotoinen. Jos Fourierin luku Fo > 0.2, riittävä tarkkuus saavutetaan ottamalla sarjasta mukaan vain ensimmäinen termi. Tässä tehtävässä Fourierin lukua ei kuitenkaan alkutilanteessa pystytä määrittämään, koska aikaa t ei tunneta. Oletetaan kuitenkin, että Fo > 0.2 ja käytetään yhden termin ratkaisua. Tarkistetaan myöhemmin tämän oletuksen voimassaolo.

Määritetään ensiksi Biotin luku ja kertoimet yhden termin ratkaisulle pallogeometriassa:

$$\mathrm{Bi} = \frac{hr_o}{k} = \frac{900 \cdot 0.02}{0.6} = 30 \longrightarrow \lambda_1 = 3.0372;\ A_1 = 1.9898;\ B_1 = 0.3346$$

Dimensioton lämpötila pallon keskipisteessä:

$$\theta_c = \frac{T_c - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{75 - 99}{8 - 99} = 0.2637$$

Toisaalta: $\theta_c = A_1 e^{-\lambda_1^2 \mathrm{Fo}}$

$$\longrightarrow \mathrm{Fo} = -\frac{1}{\lambda_1^2} \ln\left(\frac{\theta_c}{A_1}\right) = -\frac{1}{(3.0372)^2} \ln\left(\frac{0.2637}{1.9898}\right) = 0.219 > 0.2 \rightarrow \text{yksi termi ok}$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{r_o^2} \longrightarrow t = \frac{\mathrm{Fo}\, r_o^2}{\alpha} = \frac{0.219 \cdot (0.02)^2}{2 \cdot 10^{-7}} = 438\ \mathrm{s} = 7.3\ \mathrm{min}$$

Dimensioton keskilämpötila lopputilanteessa:

$$\bar{\theta} = A_1 e^{-\lambda_1^2 \mathrm{Fo}} B_1 = \theta_c B_1 = 0.2637 \cdot 0.3346 = 0.0882$$

Todellinen keskilämpötila lopputilanteessa:

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_i - T_\infty} \longrightarrow \bar{T} = \bar{\theta}(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.0882 \cdot (8 - 99) + 99 = 90.98\ ^\circ\mathrm{C} \approx 91\ ^\circ\mathrm{C}$$

Kananmunaan siirtynyt lämpö:

$$Q = mc_p(\bar{T} - T_i) = \rho V c_p (\bar{T} - T_i) = \rho c_p \frac{4}{3} \pi r_o^3 (\bar{T} - T_i)$$

Koska $\alpha = \dfrac{k}{\rho c_p} \longrightarrow \rho c_p = \dfrac{k}{\alpha}$

$$\longrightarrow Q = \frac{k}{\alpha} \frac{4}{3} \pi r_o^3 (\bar{T} - T_i) = \frac{0.6}{2 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0.02)^3 \cdot (91 - 8) = 8344\ \mathrm{J}$$