



MAT-10320, Insinöörimatematiikka X 2

Tentti, 14.9.2009

Vastaa viiteen tehtävään. Laskimet, kirjallisuus ja taulukot eivät ole sallittuja. Onnea tenttiin!

Tehtävä 1 Määrittele seuraavat käsitteet ja anna jokaisesta esimerkki

- Lineaarinen yhtälö
- Symmetrinen matriisi
- Ortogonaalinen matriisi.

Tehtävä 2 a) Jos A on kääntävä, niin mikä on yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisu? (Johda vastauksesi)

b) Anna lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{aligned}x - y + z &= 6 \\2x + 2y - z &= 12 \\x + y + z &= 24\end{aligned}$$

ratkaisut seuraavan Matlab-tulostuksen pohjalta

A

```
1 -1 1
2 2 -1
1 1 1
```

```
>> inv(A)*[6;12;24]
```

```
ans =
```

```
3
9
12
```

KÄÄNNÄ —>

Tehtävä 3 Muotoile kääntyvien matriisien peruslause oleellisilta osin.

Apuja muistamiseen: (homog.) lineaarinen yhtälöryhmä, rref, lin. rttomuus, det, ominaisarvot, nolla-avaruus, ...

Tehtävä 4 a) Laske

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Matriisi A on idempotentti, jos $A^2 = A$. Lisäksi tiedetään, että jos A ja B ovat samaa kertalukua olevia neliömatriiseja, niin $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Mitä mahdollisia arvoja idempotentin matriisin determinantti voi saada?

Tehtävä 5 a) Määrittele ominaisarvon ja ominaisvektorin käsite.

b) Kerro miten voit laskea annetun neliömatriisin ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit

FYS-1190 Insinöörifysiikka K II

Tentti, 4.5.2009

Tehtäväpaperin kääntöpuolella on kaavoja. Muita kaavakokoelmia ei saa käyttää.

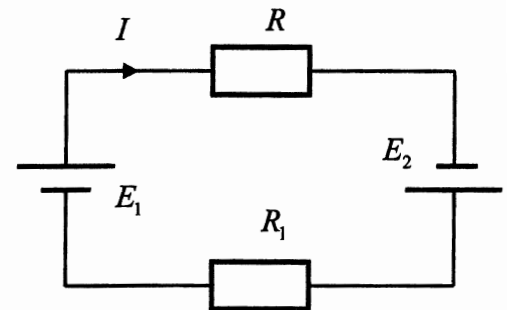
1. Ompelukoneen neulan liike on harmonista värähtelyä x – akselia pitkin taajuudella 2.5 Hz . Ajanhetkellä $t = 0$ neulan kärki on kohdassa $+1.1 \text{ cm}$ ja sen nopeus on -15 cm/s . Laske neulan kiihtyvyyden hetkellä $t = 0$.

2. Potentiaali tasaisesti varatun eristepallon sisällä on

$$V(r) = \frac{Q(3r_0^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 r_0^3}.$$

missä Q on pallon varaus ja r_0 säde. Määritä tätä käyttäen sähkökenttä pallon sisällä.

3. Määritä vastus R siten, että piirin virta on $I=0.5 \text{ A}$. Muut komponenttiarvot ovat. $R_1 = 5\Omega$, $E_1 = 4\text{V}$, $E_2 = 2\text{V}$

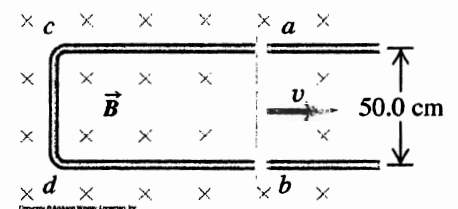


4. Suorakulmaisen silmukan sivut ovat 20 mm ja 30 mm ja siinä kulkee 1.5 A virta. Silmukan taso muodostaa 40° magneettikentän kanssa. Kentän suuruus on 380 mT . (a) Piirrä kuvio tilanteesta ja valitse virran suunta. (b) Minkä kulman silmukan pintavektori muodostaa magneettikentän kanssa? (c) Laske silmukkaan kohdistuva vääntömomenti kenttää vastaan kohtisuoran akselin suhteen.

5. Johtava sauva ab liikkuu metallisia kiskoja pitkin oikealle. Sauvan pituus on 50.0 cm . Systemi on sijoitettu sen tasoa vastaan kohtisuoraan homogeeniseen magneettikenttään, jonka suuruus on 0.800 T .

(a) Laske sauvaan indusoituva sähkömotorinen voima, kun sauvan nopeus on 7.50 m/s . (b) Mihin suuntaan virta kulkee sauvassa? (c)

Jos silmukan resistanssi on 1.50Ω (oletetaan vakioksi), minkä suuruinen ja suuntainen voima tarvitaan, että sauvan nopeus pysyisi vakiona?



$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

FYS-1190 Insinöörifysiikka K II: kaavakokoelma

Värähtely

$$f = 1/T, \quad \omega = 2\pi f$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \phi)$$

$$\beta = b/2m$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Mekaaniset aallot

$$v = \lambda f, \quad k = 2\pi/\lambda$$

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$v = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{Y/\rho}$$

$$y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$f_n = nv/2L$$

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log(I/I_0)$$

$$f_{\text{beat}} = f_a - f_b$$

$$f_L = \left(\frac{v - v_L}{v - v_S}\right) f_S$$

$$\sin \alpha = v/v_S$$

Sähkökenttä

$$\vec{F}_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

DC-piirit

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d}, \quad K = \frac{V_0}{V}$$

$$C = \sum C_i, \quad \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\vec{j} = nq\vec{v}_d, \quad j = \frac{I}{A}$$

$$V = RI$$

$$R = \frac{\rho \ell}{A}$$

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

$$R = \sum R_i, \quad \frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$$

$$P = VI$$

$$\sum V = 0$$

$$\sum i_{\text{tulevat}} = \sum i_{\text{lähtevät}}$$

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC, \quad \tau = L/R$$

Magneettikenttä

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{\mu} = NI\vec{A}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum i$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \mu_0 \left(\sum i + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Induktio ja AC-piirit

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

$$Li = N\Phi_B$$

$$L = \mu_0 n^2 S \ell$$

$$U = \frac{1}{2} Li^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$X_C = 1/\omega C, \quad X_L = \omega L$$

$$\omega = 2\pi f$$

Sähkömagn. aallot

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$E_0 = cB_0$$

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$