Energia- ja prosessitekniikka

ENER-1020 ENERGIA- JA PROSESSITEKNIIKAN MATEMAATTISET MENETELMÄT
Tentti 24.5.2006

Tentissä saa käyttää kurssin luentomonistetta (Ahlstedt, H., Lämpötekniikan matemaattiset apuneuvot, luentokalvot, luentomoniste 3/99 tai aiempi versio). Harjoitustehtäviä ratkaisuineen ja muuta kirjallisuutta **ei saa** *käyttää.*

(5 pist./tehtävä)

1. Ratkaise numeerisesti sekä eksplisiittisellä että implisiittisellä Adamsin menetelmällä yhtälö $y' = 4e^{0,8x} - 0,5y$ arvosta $x = 0$ arvoon $x = 4$ käyttäen askelpituutta 1. Kohtaa $x = 0$ ennen olevat arvot voit laskea analyyttisestä ratkaisusta $y = \frac{4}{1,3}(e^{0,8x} - e^{-0,5x}) + 2e^{-0,5x}$. Vertaa tulosten tarkkuutta analyyttiseen ratkaisuun kohdassa $x = 4$.

2. Tarkastellaan funktiota $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$, $f(x + 2\pi) = f(x)$, joka on jatkuva kohdassa $x = n\pi$. Funktion Fourier'n sarja on

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx$$

Tämän sarjan derivointi termi termiltä antaa

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx$$

minkä voidaan osoittaa olevan funktion

$$g(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad g(x + 2\pi) = g(x)$$

Fourier'n sarja. Esitä funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ taajuusspektrit.

3. Ratkaise Laplace-muunnoksella yhtälö

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 3\frac{\partial y}{\partial t} + 2y = e^{-t}$$

$$y(0) = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(0) = 0$$

4. Mitenkä ratkaiset tehtävän

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 < x < 1, \ 0 < y < 1$$

– reunaehdot

$$u(x,y) = 0 \qquad \text{ylä–, ala – ja vasemmalla reunalla}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 1 \qquad 0 \le y \le 1$$

differenssimenetelmällä?

5. Etsi funktioiden

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Fourier'n sarjat.