$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & \gamma & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

RAK-32320 Johdatus materiaalimalleihin

Tentti 24.1.2019/ Reijo Kouhia

Tentissä ei sallita kaavakokoelmaa eikä muutakaan kirjallista materiaalia. Laskin (funktio tai ohjelmoitava) saa olla mukana.

Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen.

1. Tasojännitystilassa olevaan kappaleessa vaikuttaa hydrostaattinen paine $p = -\frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = 2\sigma_0$. Jännityksettömän tasopinnan normaali on suuntaan $(0, 1, 1)^T$. Normaalijännitys tasossa, jonka normaali on z-akselin suuntainen, on $2\sigma_0$. Normaalijännitys häviää tasolla, jonka normaali on vektorin $(3, 4, 0)^T$ suuntainen. Määritä jännitysmatriisi $\boldsymbol{\sigma}$ (x, y, z)-koordinaatistossa lausuttuna. Määritä myös deviatorinen jännitystensori $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}$ ja tehollinen jännitys σ_{eff}. Tehollinen jännitys σ_{eff} määritellään kaavalla $\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{3J_2}$, jossa J_2 on deviatorisen jännitysmatriisin toinen invariantti $J_2 = \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{s}^2)$

$x_1 - \alpha X_1 = 0 = u_1$

2. Siirtymätila on annettu lausekkeilla

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$x_2 + \beta X_2 = \gamma X_3$

$$x_1 = \alpha X_1, \qquad x_2 = -(\beta X_2 + \gamma X_3), \qquad x_3 = \gamma X_2 - \beta X_3,$$

jossa α, β, γ ovat vakioita.

   (a) Määritä siirtymävektori $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, deformaatiogradientti $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \partial\mathbf{u}/\mathbf{X}$ ja Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T{\cdot}\mathbf{F} - \mathbf{I})$. $= \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

   (b) Mikäli vakioilla on seuraavat arvot $\alpha = 1, \beta = -\cos\theta, \gamma = -\sin\theta$, määritä Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori. Tulkitse tulos. Piirrä alkutilassa (X_2, X_3) tason neliön $(0, L) \times (0, L)$ kuva deformoituneessa tilassa.

3. Modifioidun Cam Clay mallin myötöpinta on muotoa

$$f(I_1, J_2) = 3J_2 + \tfrac{1}{3}M^2 I_1(2p_c + \tfrac{1}{3}I_1) = 0,$$

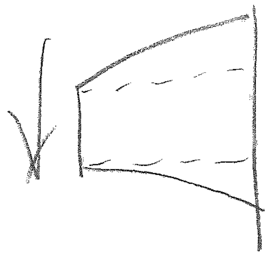
jossa M ja p_c ovat materiaaliparametreja, $I_1 = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}$ ja $J_2 = \frac{1}{2}\text{tr}(\boldsymbol{s}^2)$ on jännitysdeviaattorin toinen invariantti.

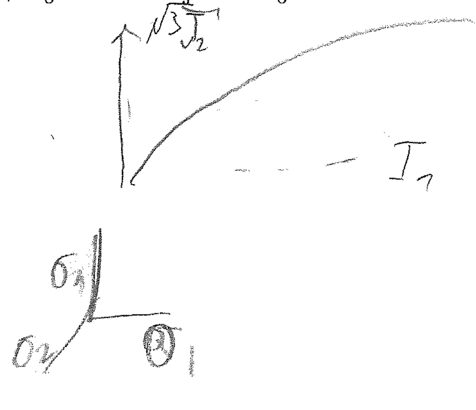
   (a) Hahmottele myötöpinnan kuvaaja deviatorisella tasolla.

   (b) Piirrä myötöpinnan leikkaus meridiaanitasolla $(I_1, \sqrt{3J_2})$ puristus ja vetomeridiaaneilla.

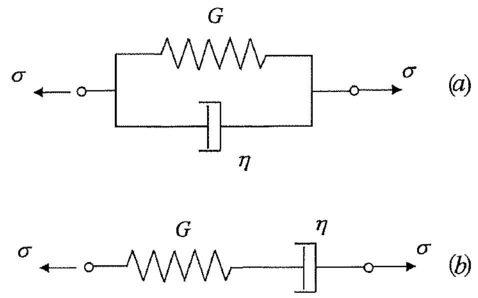
   (c) Määritä materiaaliparametrit kun koekappale myötää jännitystiloissa: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p_y$ ja $\sigma_x = \sigma_y = -\frac{1}{2}p_y$, $\sigma_z = -\frac{1}{2}p_y + \sigma_0$. Missä rajoissa σ_0 voi vaihdella?

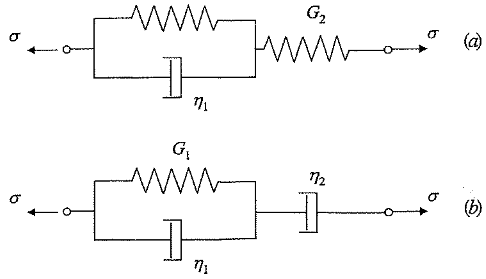
Käännä!





4. Tarkastellaan viskoelastisen aineen leikkauskoetta. Alla vasemmalla olevassa kuvassa on esitetty Kelvinin ja Maxwellin ainemallit ja oikealla on kaksi versiota lineaarisesta standardiaineesta.





Määritä Mitkä ovat relaksaatiokokeessa kuvissa olevien mallien alku- ja loppuleikkausmoduulit, eli kun $t = 0$ ja $t \to \infty$?

Mitkä ainemalleista kuvaavat nesteitä ja mitkä kiinteää ainetta?