RAK-32320 Johdatus materiaalimalleihin

Tentti 19.12.2019/ Reijo Kouhia

Tentissä ei sallita kaavakokoelmaa eikä muutakaan kirjallista materiaalia. Laskin (funktio tai ohjelmoitava) saa olla mukana.

Jokainen tehtävä on 6 pisteen arvoinen, max 24 pistettä.

1. Rakenteessa vallitsee jännitystila, jota kuvaa jännitystensori

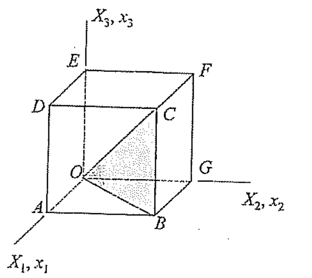
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & (9/8)\sigma_0 \\ 0 & (9/8)\sigma_0 & (9/4)\sigma_0 \end{bmatrix},$$

lausuttuna karteesisessa suorakulmaisessa (x_1, x_2, x_3) koordinaatistossa. Rakenteessa on liimaliitos tasossa, jonka normaalin suunta on $(1, 2, 2)$ ja sen lujuus normaalijännitysten suhteen on σ_0 ja leikkaukselle $\frac{1}{2}\sigma_0$. Määritä millainen x_1-suunnan normaalijännityksen σ_{11} on oltava, jotta sauma kestäisi?

2. Deformaatiokuvaus on annettu lausekkeilla

$$x_1 = \chi_1(\boldsymbol{X}) = a_1(X_1 + 2X_2), \qquad x_2 = \chi_2(\boldsymbol{X}) = a_2 X_2, \qquad x_3 = \chi_3(\boldsymbol{X}) = a_3 X_3.$$

Tarkastellaan all olevan kuvan mukaista yksikkökuutiota.



(a) Määritä deformaatiogradientti $\mathbf{F} = \partial\chi/\partial\mathbf{X}$ ja Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$.

(b) Määritä $\mathbf{E}$:n avulla diagonaalin OC pituus ℓ deformoituneessa tilassa.

3. Materiaalin myödön oletetaan noudattavan seuraavaa ehtoa

$$f(I_1, J_2) = J_2 + \alpha I_1 - \beta = 0,$$

jossa $J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{s}^2$ on jännitysdeviaattorin toinen invariantti ja $I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}$ on jännitystensorin ensimmäinen invariantti ja jossa α ja β ovat parametreja, jotka voidaan määrittää kahdesta lujuuskokeesta.

Kolmiaksiaalikokeessa on mitattu seuraavat kaksi jännitystilaa, jotka aiheuttavat myödön:

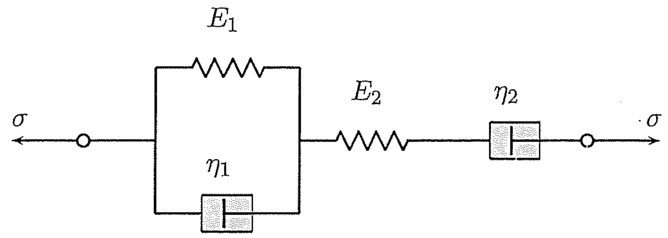
(a) $\sigma_{11} = -2\sigma_0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{1}{2}\sigma_0$ ja
(b) $\sigma_{11} = -6\sigma_0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = -3\sigma_0$,

jossa σ_0 on positiivinen jännitysarvo. Määritä materiaaliparametrit α ja β. Määritä mikä on leikkausmyötörajan riippuvuus paineesta (tai ensimmäisestä invariantista I_1. Hahmottele myötöpinnan kuvaajaa meridiaanileikkauksessa (I_1, σ_e) jossa $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$. Millaisia ovat myötöpinnan kuvaajat deviatorisella tasolla?

Käännä!

4. Johda oheisen lineaarisista jousista ($\sigma = E\varepsilon$) ja nestesylintereistä ($\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$) koostuvan mallin konstitutiivinen yhtälö. Malli koostuu Kelvinin ja Maxwellin elementeistä, joiden konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$\text{Kelvin:} \quad \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \qquad \text{Maxwell:} \quad \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\dot{\varepsilon}.$$



Hahmottele mallin relaksaatio ja virumisominaisuuksia. Relaksaatio- ja virumisfunktioita ei tarvitse ratkaista.

RAK-32320 Introduction to materials modelling

Exam 19.12.2019/ Reijo Kouhia

No extra written material or list of formulas are allowed. Pocket calculator (function or programmable) can be used.

Every problem is worth 6 points, thus maximun 24 points.

1. In a structure the following stress state applies

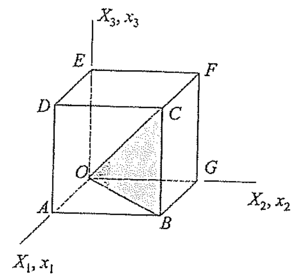
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & (9/8)\sigma_0 \\ 0 & (9/8)\sigma_0 & (9/4)\sigma_0 \end{bmatrix},$$

expressed in Cartesian (x_1, x_2, x_3) coordinate system. There exist a glued joint on a plane having normal in the $(1,2,2)$ direction. The glued joint has strength σ_0 for normal stresses and $\frac{1}{2}\sigma_0$ in shear. Determine the allowed values for the x_1-component σ_{11} such that the joint will sustain the load?

2. Deformation is given by

$$x_1 = \chi_1(\boldsymbol{X}) = a_1(X_1 + 2X_2), \qquad x_2 = \chi_2(\boldsymbol{X}) = a_2 X_2, \qquad x_3 = \chi_3(\boldsymbol{X}) = a_3 X_3.$$

Investigate the cube of side length L.



(a) Determine the deformation gradient $\mathbf{F} = \partial\chi/\partial\mathbf{X}$ and the Green-Lagrange strain tensor. $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$.

(b) By using the strain tensor $\mathbf{E}$ determine the length of the diagonal OC ℓ in the deformed state.

3. A material is assumed to obey the following yield condition

$$f(I_1, J_2) = J_2 + \alpha I_1 - \beta = 0,$$

where $J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{s}^2$ is the second invariant of the deviatoric stress tensor and $I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}$ is the first invariant of the stress tensor. The model has two material parameters α and β, which can be determined from two tests.

In a triaxial loading device yield is observed to initiate at stress states

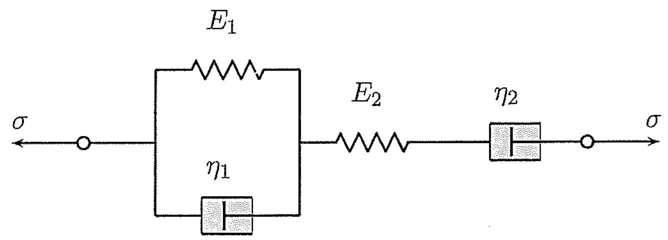
(a) $\sigma_{11} = -2\sigma_0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{1}{2}\sigma_0$ and
(b) $\sigma_{11} = -6\sigma_0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = -3\sigma_0$,

where σ_0 is a positive stress value. Determine the material parameters α and β. Detemine the relation between pressure (or the first invariant of stress tensor I_1) and a shear stress. Sketch the yield surface on the meridian planes (I_1, σ_e) where $\sigma_e = \sqrt{3J_2}$. Sketch also the shape on the deviatoric plane.

Please, turn over!

4. Derive the constitutive equation for the model show below consisting of linear springs ($\sigma = E\varepsilon$) and dashpots ($\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$). The model consists of the Maxwell and Kelvin elements, which individually have the following constitutive equations:

$$\text{Kelvin:} \quad \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad \text{Maxwell:} \quad \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\dot{\varepsilon}.$$



Sketch the relaxation and creep behaviour of the model. The relaxation and creep functions need not to be solved.