



MAT-10423 Insinöörimatematiikka C 2u (Kangas)

Tentti 10.12.2012

1. a) Esitä pisteiden $P = (1, 1, 1)$, $Q = (4, 0, 2)$ ja $R = (0, 1, -1)$ kautta kulkevan tason yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$
- b) Tutki leikkaavako suora

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ja a)-kohdan taso. Jos leikkaavat, niin missä pisteessä (tai pisteissä)?

2. Ratkaise vektoreista

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

muodostettu yhtäryhmä

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Vastaa myös (perusteluiden kera) kysymykseen: Ovatko vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ja \mathbf{v}_3 lineaarisesti riippumattomia?

3. a) Olkoot matriisit A, B ja X 2×2 -matriiseja ja olkoon $|A| = 2$ ja $|B| = 3$. Laske matriisin X determinantti, kun tiedetään, että matriisi X toteuttaa yhtälön

$$A^{-1}(BX)^{-1} = 2B^8.$$
- b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

käänneismatriisi.

4. Muodosta matriisi A , jonka ominaisarvot ja eräät niitä vastaavat ominaisvektorit ovat

$$\lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ja } \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ja laske A^{217} .

Insinöörimatematiikka C2u

Kaavakokoelma

1.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}.$$

2.

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

3.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

4.

$$\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{u}}{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}.$$

5. Tasot:

(a)

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{r} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{p}$$

(b)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

6.

$$(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

7.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

8. Determinantin kehittäminen i . riviä pitkin

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

9. Ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \det(A - \lambda I) = 0.$$

10. Diagonaalisointi

$$S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$$

11. Pienimmän neljösunnan menetelmä

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$